Forcing e gruppi liberabili

Filippo Calderoni

Dato un cardinale regolare k, si dice che un gruppo M è k-libero quando ogni sottogruppo di M di cardinalità minore di k è libero. E' ben noto che se un gruppo è libero allora esso è anche k-libero, per ogni cardinale k. Tuttavia, non vale il viceversa: infatti $\mathbb{Z}^{\omega}$, detto il gruppo di Baer-Specker, è $\aleph_1$-libero ma non libero. L'esistenza di gruppi k-liberi non liberi è largamente discussa da Ekloff e Mekler in "Almost Free Modules", con l'applicazione di tecniche insiemistiche tra cui assiomi di grandi cardinali. Ora, la domanda che ci poniamo è la seguente: "dato un gruppo klibero (e non libero) è possibile forzare l'esistenza di una base per esso, e cioè che esso è libero?". Diremo liberabili quei gruppi per cui esiste una risposta affermativa. In particolare, alcuni gruppi $\aleph_1$-liberi sono liberabili. Per dimostrarlo, si applica il forcing che distrugge un insieme stazionario di ω_1, introdotto da Baumgartner. In questa comunicazione si introdurrano alcune importanti tecniche per l'analisi e la costruzione di gruppi k-liberi, quali le filtrazioni e l'invariante gamma, per poi mostrare come e quando è possibile applicare il forcing sopraccitato per forzare un gruppo k-libero essere libero, nel caso di k uguale a $\aleph_1$.